

Secretaria
de Educação e
Esportes



GOVERNO DE
**PER
NAM
BUCO**
ESTADO DE MUDANÇA

Unidade Curricular

Fractais

Material de apoio à ação docente

Secretário de Educação e Esportes

Alexandre Schneider

Secretária Executiva de Gestão de Rede

Karen Martins Andrade Pinheiro

Secretária Executiva de Desenvolvimento da Educação

Tárcia Regina da Silva

Secretário Executivo do Ensino Médio e Profissional

Gilson Alves do Nascimento Filho

Secretário Executivo de Articulação Municipal

Natanael Silva

Secretário Executivo de Administração e Finanças

Gilson Monteiro Filho

Secretário Executivo de Obras

Rafael Cunha

Secretário Executivo de Esportes

Luciano Leonídio

Secretaria Executiva de Gestão de Pessoas

Rafaela Ramos

Elaboração

Fabiana dos Santos Faria

Equipe de coordenação

Janine Furtunato Queiroga Maciel

**Gerente Geral de Políticas Educacionais do Ensino Médio
(GGPEM/SEMP)**

Rômulo Guedes e Silva

**Gestor de Formação e Currículo
(GGPEM/SEMP)**

Andreza Shirlene Figueiredo de Souza

**Chefe da Unidade de Formação e Currículo do Ensino Médio
(GGPEM/SEMP)**

Revisão

Ana Caroline Borba Filgueira Pacheco

Andreza Shirlene Figueiredo de Souza

Sumário

APRESENTAÇÃO	5
<i>Por dentro dos conceitos</i>	7
Fractais: histórico e definição	7
<i>Momento de Atividades</i>	8
<i>Possibilidade(s) Avaliativa(s)</i>	9
<i>Por dentro dos conceitos</i>	10
Dos "monstros matemáticos" aos Fractais	10
<i>Momento de Atividades</i>	12
<i>Possibilidade(s) Avaliativa(s)</i>	15
<i>Por dentro dos conceitos</i>	16
O ensino da Geometria para além da Geometria Euclidiana	16
<i>Momento de Atividades</i>	17
<i>Possibilidade(s) Avaliativa(s)</i>	19
Referências bibliográficas	20

APRESENTAÇÃO

Prezado/a professor/a.

A Unidade Curricular **Fractais**, destinada aos estudantes do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública Estadual de Pernambuco e fundamentada na Portaria nº 1.432/2018, que orienta a elaboração dos Itinerários Formativos, está inserida na *Trilha Formativa (TF) MatemátizAÇÃO, Design e Criatividade*. Uma Trilha Formativa que intercala, em grande parte, habilidades das componentes de Matemática e Linguagens, apesar das demais áreas do conhecimento também contribuirão para o desenvolvimento de sua proposta.

Vale salientar, mais uma vez, que na nova organização curricular, todas as Unidades Curriculares propostas nas Trilhas Formativas possuem um ou mais eixos estruturantes que as embasam quanto às habilidades que serão desenvolvidas durante a prática pedagógica com os estudantes. Para a Unidade Curricular **Fractais**, em especial, temos três eixos estruturantes: *Investigação Científica, Processos Criativos e Mediação e intervenção sociocultural*, compostos pelas seguintes habilidades:

Com base nesses pressupostos, esta **Unidade Curricular** propõe como habilidades, os seguintes tópicos a serem abordados pelo(a) professor(a) ao longo da sua prática pedagógica:

Investigação Científica – (EMIFMAT01PE) Investigar e analisar situações-problema selecionando e determinando conhecimentos matemáticos associados aos fractais, contribuindo com a leitura de uma dada situação, identificando e elaborando modelos para sua representação.

Processos Criativos – (EMIFMAT04PE) Reconhecer produtos e/ou processos criativos por meio de fruição, vivências e reflexão crítica na produção dos conhecimentos relacionados à Geometria Fractal e sua aplicação no desenvolvimento de processos tecnológicos diversos.

Mediação e Intervenção Sociocultural - (EMIFMAT07PE) Identificar e explicar questões socioculturais e ambientais aplicando conhecimentos e habilidades da Geometria Fractal para avaliar e tomar decisões em relação ao que foi observado

Nesse contexto, a **ementa** da Unidade Curricular **Fractais** propõe a:

Aplicação da Geometria Fractal e dos conhecimentos tais como segmentos de reta, ângulos, sequência numérica, potência, padrões e regularidades, relação algébrica e geométrica, visualização 3D, investigação de padronização fractal, padrões geométricos, cultura fractal, números complexos. Utilização das tecnologias digitais como softwares ou aplicativos voltados para a Geometria Fractal.

Apesar do tema ser diferenciado ao que é proposto para o ensino de matemática na Educação Básica, especificamente para o Ensino Médio e, ainda mais específico, para o ensino de Geometria, é importante refletir e considerar o que o Currículo de Pernambuco traz sobre os *Desafios para o Ensino Médio* (PERNAMBUCO, 2021, p. 56):

[...] o desafio constante de proporcionar uma educação de qualidade articulada com as demandas das juventudes e da sociedade contemporânea é atualizado a cada nova geração que chega nas escolas. Essa realidade demonstra que o Currículo precisa ser dinâmico. A educação precisa se valer da tecnologia na busca de promover o diálogo com a realidade dos estudantes. E não apenas isso, mas a forma de consumo de informação vem mudando a cada dia, novas mídias e recursos digitais se renovam cada vez mais em intervalo de tempo cada vez menor.

É diante desta reflexão que este material de apoio elaborado para o desenvolvimento da Unidade Curricular **Fractais** traz como proposta discussões e elaboração/desenvolvimento de atividades que poderão contribuir para as discussões que tangem temas importantes da sociedade e que toca especificamente na 5ª Competência Específica de Matemática para o Ensino Médio da BNCC (2018):

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (PERNAMBUCO, p. 229).

Portanto, uma proximidade que contribui para os que trazem os documentos educacionais atuais, mas que também dialoga com as atuais pesquisas voltadas para o ensino de matemática e, especificamente, para o ensino de geometria. Segundo Almouloud (2003) “A geometria é um ramo importante da matemática, tanto como objeto de estudo, quanto como instrumento para outras áreas” (ALMOULOUD, 2003, p. 126). Apesar da importância destacada pelo autor sobre o ensino de geometria, é sabido, pelas pesquisas em Educação Matemática, que durante algum tempo este ensino esteve em segundo plano nas aulas de matemática.

Uma situação que ainda pode ser observada em Câmara (2009) quando traz que, mesmo com consideráveis avanços nas pesquisas em Educação Matemática, é possível observar um distanciamento entre a complexa realidade das aulas de matemática, e em especial no ensino de geometria, e os resultados extremamente positivos dessas pesquisas.

De acordo com o autor, o ensino de Geometria nos ensinamentos Fundamental e Médio está doente e que, apesar da existência de uma reflexão sobre questões relativas ao ensino-aprendizagem da Geometria terem se intensificado nos últimos anos, existem aspectos causais para tal doença que podem ser observados. Um exemplo a ser observado pode ser a formação inicial do professor que quase não vivenciou esse ramo da matemática, além de uma supervalorização do livro didático que por tanto tempo apresentou os conteúdos da Geometria ao final. Uma situação que pode ter sido causada por reflexo ao que foi o Movimento da Matemática Moderna. Um movimento que teve como principal proposta algebrizar o ensino de geometria e que até hoje reflete em uma grave realidade e ainda não encontrou um modelo que restabeleça o lugar da Geometria no sistema educacional brasileiro.

Diante da proposta que representa a vivência dos Itinerários Formativos no que diz respeito ao aprofundamento e ampliação da Formação Geral Básica (FGB), a Unidade Curricular de **Fractais** apresenta-se como uma oportuna e significativa atividade pedagógica para o ensino de geometria e, mais especificamente, para um ensino que vai além do que é apresentado sobre o ensino da geometria euclidiana. Nesse sentido, Assis et al (2008) trazem que alguns estudos têm apontado que modelos matemáticos euclidianos estabelecidos há tempo e que reproduzem a geometria da natureza têm se apresentado incompletos e, até mesmo, inadequados, visto que muitas formas encontradas na natureza não são, necessariamente, nos formatos circulares, triangulares ou de esferas e retângulos. Os autores destacam ainda que as dimensões euclidianas usuais, por construção, das medidas de comprimento, área e volume, ocasionam resultados contraditórios, visto que tais objetos só podem ser adequadamente mensurados em espaços de dimensão fracionária. Nesse caso, para além da importância de um trabalho que envolva um pensamento geométrico não euclidiano, vemos que os **Fractais** servem, dentre tantas situações, como ferramenta de imitação nos cenários naturais e de plantas.

É importante observar que o portfólio da Unidade Curricular de Fractais traz como *Foco Pedagógico* o desenvolvimento de um processo de ensino que investiga e explora o conhecimento da Geometria Fractal detalhadamente.

Com isso, é possível afirmar que a Trilha Formativa **Matematização, Design e Criatividade** na qual a Unidade Curricular **Fractais** faz parte, apresenta uma contribuição à discussão que envolve as diferentes geometrias, respeitando a proposta do Novo Ensino Médio (NEM) no que diz respeito à ampliação e aprofundamento da Formação Geral Básica (FGB).



Por dentro dos conceitos

Fractais: histórico e definição

Ao pesquisar sobre a Geometria Fractal, é possível encontrar na literatura que o termo **Fractal** nasce do latim *fractus* que parte do verbo *frangere* que, por sua vez, significa quebrar, fragmentar. Dessa forma, é possível dizer que a Geometria Fractal está associada à uma parte da Ciência denominada de Caos. Uma palavra, que de acordo com alguns dicionários da Língua Portuguesa, pode significar *desordem, confusão e tudo aquilo que está em desequilíbrio*. Ou, pode ainda, ter seu significado originado a partir da etimologia da palavra “caos”, que derivada do grego *khaíno* pode ser traduzida como “separar”.

Segundo Nascimento et al (2012, p.115) *apud* Barbosa (2005, p.10): “a estrutura fragmentada do fractal fornece certa ordem ao caos e busca padrões dentro de um sistema por vezes aparentemente aleatório.” Isso porque “na natureza coexistem a ordem (o determinismo) e o caos (a imprevisibilidade)” (Idem).

É sabido que o termo *Fractais* foi utilizado pela primeira vez pelo matemático francês Benoit Mandelbrot que sentiu a necessidade de encontrar um nome que representasse a geometria de fenômenos naturais irregulares, mas que ao mesmo tempo apresentasse características comuns e notáveis. Para Mandelbrot as irregularidades e o caos do mundo deveriam ser celebrados, visto que a natureza é formada por aquilo que ele chamava de “asperezas” ao destacar alguns exemplos como o fato das montanhas não representarem cones, nuvens não representarem esferas, litorais não representarem círculos e raios não se deslocarem em linha reta, entre tantos outros exemplos.

E foi assim, diante de sua inquietação, que Mandelbrot se questionou sobre a possibilidade de haver uma maneira adequada ou sistemática, um jeito único que pudesse descrever e até definir essa variedade “áspera” e imperfeita das formas que representam o mundo real. Portanto, foi diante dessa busca que o matemático francês percebeu uma *autossimilaridade* como base de um tipo completamente novo na geometria. Essa *autossimilaridade*, observada em diferentes representações da natureza como por exemplo nos galhos das árvores que se ramificam bifurcando seus galhos em outros menores, nas folhas das samambaias que seguem a mesma ideia anterior, na estrutura de um brócolis, entre tantos outros, foi o que permitiu o surgimento da nomenclatura *Fractal*.

Ou seja, a observação de que a natureza pode se repetir em todos os seus tipos de formas, sucessivamente em escalas cada vez menores e de maneira infinita, permitiu que Mandelbrot formalizasse a teoria de que, a partir de uma estrutura original, novos padrões podem continuar sendo criados infinitamente. Com isso, a *matemática fractal*, apesar de não poder ser usada para prever grandes eventos em sistemas caóticos, já que a natureza sofre interferência de diferentes mudanças climáticas, além de ventos, entre outros, o tempo todo, pode dizer que tais eventos acontecerão. Além disso, é possível dizer que a *matemática fractal*, atrelada à teoria do caos,

apresentou uma beleza antes não vista e que inspirou diferentes pesquisadores de diferentes áreas do conhecimento.

Diante de tudo isso, pode-se voltar ao que traz o portfólio¹ da Trilha Formativa **Matematização, Design e Criatividade** quando apresenta que a “[...] Matemática tem uma linguagem própria, com código definido e relação semântica objetiva, sendo uma importante ferramenta **para leitura de mundo e intervenção na realidade.**” (PERNAMBUCO, 2021, p. 5, grifo nosso) e aproveitar para propor aos estudantes uma interessante investigação das possíveis representações *fractais* nas diversas áreas do conhecimento. Vamos lá?



Momento de Atividades

Como propor uma investigação de maneira estimulante e envolvente? São muitas variáveis envolvidas e, portanto, impossíveis de serem definidas. Porém, é importante lembrar que todo trabalho investigativo precisa de uma discussão inicial, de um debate prévio que despertem no estudante certas inquietações que provocarão uma curiosidade que o levará a buscar respostas relacionadas ao tema apresentado e, por fim, que tais respostas encontradas gerem uma ampla discussão e formalização do conhecimento.

Que tal iniciar uma aula com a palavra **FRACTAL** em letras garrafais no quadro e provocar os estudantes com perguntas como: se alguém já ouviu essa palavra e o que ouviu sobre; o que sabem sobre essa palavra tão diferente e não tão presente nas aulas de matemática e no dia a dia... É sabido que duas situações diferentes podem acontecer:

1. Os estudantes podem interagir e responder algo sobre os questionamentos, inclusive, buscando informações instantâneas em seus smartphones. Caso isso aconteça, anote tudo o que disserem ao redor da palavra FRACTAL em destaque e vá direcionando a discussão para uma breve apresentação do que sejam *Fractais* (o que pode incluir alguns exemplos e o nome do matemático que definiu a palavra, por exemplo).
2. Os estudantes podem não interagir e não responderem algo sobre o que foi provocado. Nesse caso, apresente uma imagem que represente **bem²** um *Fractal* e afirme que “essa imagem representa um *Fractal*”. A partir daí, escreva, você, algumas palavras que se relacionem com a definição de *Fractais* e retome as perguntas provocativas do início. Caso sinta necessidade de mais provocação para que haja interação, apresente uma **segunda imagem³** e retome mais uma vez o processo provocativo com mais algumas palavras.

Ao finalizar essa primeira etapa, siga para a etapa seguinte que pode ser proposta da seguinte maneira (lembre-se sempre que esse material é sugestivo):

- Organização dos estudantes em grupos para uma atividade que será produzida nas próximas aulas;

¹ https://portal.educacao.pe.gov.br/wp-content/uploads/2023/08/Portfolio_Trilha_Matematizacao_Design.pdf

² Sugestão 1:

https://br.freepik.com/fotos-gratis/uma-mandala-colorida-com-um-fundo-azul_40873610.htm#query=fractais&position=0&from_view=keyword&track=sph&uuid=fa8e6445-a7c6-4a77-90d4-d3fd6c1099e1

³ Sugestão 2: <https://aidobonsai.com/wp-content/uploads/2011/10/fractaltree.jpg>

➤ Definição coletiva (professor/estudantes) de um cronograma com o número de aulas necessárias para elaborarem suas produções a partir das etapas de produção apresentadas a seguir:

- 1) Os estudantes deverão acessar o canal do Youtube e escrever a palavra **Fractal** no espaço da pesquisa;
- 2) Em seguida, deverão assistir alguns vídeos que aparecerão como filtro da pesquisa e escolher aquele que mais agrada e/ou contribuir para a compreensão do tema *Fractais* (os critérios utilizados para a escolha podem ser de acordo com a definição de cada grupo);
- 3) Os estudantes deverão fazer uma breve apresentação que deve incluir o vídeo escolhido (ou partes dele) e a realização de uma atividade proposta por eles para a participação da turma (pode ser um quizz, um caça palavras ou cruzadinha, uma produção artística ou textual...);
- 4) Os grupos deverão, a partir de um critério avaliativo organizado em conjunto, professor/estudantes, avaliar as demais apresentações e a proposta de atividade realizada por cada um.

Seguindo as orientações do *Foco Pedagógico* desta Unidade Curricular, é importante observar que a discussão passe pelos itens apresentados e que inclui, por exemplo: *Seleção de informações e de fontes confiáveis [...]* e *Identificação e aprofundamento de um tema ou problema [...]*, além dos demais, mas que dependem de uma boa orientação e mediação do professor regente sugerindo e acompanhando os materiais de pesquisa e de produção em cada etapa da atividade proposta.

Possibilidade(s) Avaliativa(s)

Ao tocar na importância dos itens apresentados no *Foco Pedagógico* proposto no portfólio da Trilha Formativa **Matematização, Design e Criatividade**, é plausível que sejam considerados como pontos de avaliação o que traz o item '*Sobre o alcance das habilidades*', quando questiona se os estudantes:

Conseguem investigar e analisar uma dúvida, questão ou problema selecionando informações retiradas de fontes confiáveis; reconhecem produtos e/ou processos criativos na produção dos conhecimentos relacionados ao tema; identificam e explicam questões socioculturais e ambientais a partir da aplicação dos conhecimentos e habilidades do tema, avaliando e tomando decisões necessárias. (PERNAMBUCO, 2021, p. 41)

Apesar de tais pontos parecerem genéricos para serem abordados como critérios avaliativos, considera-se que o/a professor/a possa estipular, de acordo com suas necessidades e sua dinâmica de trabalho, um diálogo entre o desenvolvimento das habilidades apresentadas com o que se deseja avaliar no intuito de contribuir nos processos de ensino e aprendizagem desenvolvidos durante a realização das atividades anteriormente propostas.



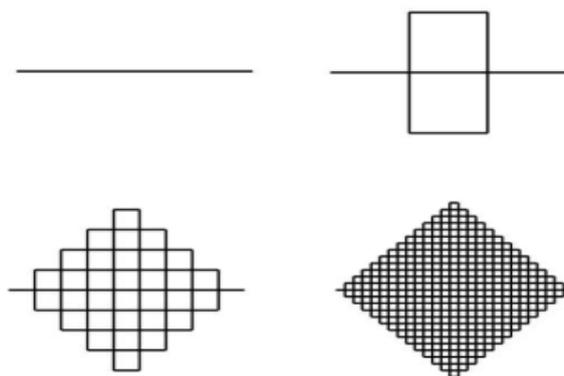
Por dentro dos conceitos

Dos "monstros matemáticos" aos Fractais

Visando contribuir, ainda mais, com a proposta de ampliação e aprofundamento da FGB de matemática, via a Trilha Formativa **MatematizAÇÃO, Design e Criatividade**, a Unidade Curricular *Fractais* tem como objetivo proporcionar ao estudante do Ensino Médio um aporte teórico sólido e ao mesmo tempo diversificado para que ele consiga, não somente, questionar e refletir sobre as diferentes situações cotidianas que ele venha se deparar em sua vida, mas também identificar beleza e incerteza numa componente que por vezes foi apresentada e vista como somente exata, difícil e, inclusive, excludente.

Como já apresentado anteriormente sobre as contribuições do matemático francês Benoit Mandelbrot para a definição de *Fractais* a partir de suas inquietações e questionamentos sobre uma geometria que, para ele, não representava os fenômenos naturais irregulares, podemos, mais uma vez, tomar como referencial Nascimento et al (2012), quando apresentam uma lista de outros matemáticos que teriam criado algumas figuras consideradas estranhas e indefinidas por não atenderem as definições da Geometria Euclidiana e que, mais tarde, seriam classificadas por *Fractais*. Tais figuras, tendo como seus criadores os matemáticos Giuseppe Peano, Waclaw Sierpiński, Helge von Koch e Georg Cantor, receberam um nome nada usual de "monstros matemáticos" na época em que foram apresentadas e que hoje são identificadas por:

i. **Curva de Peano**: Apresentada pelo matemático Giuseppe Peano, em 1890, como uma proposta de curva para cobrir totalmente uma superfície plana, tem sua construção iniciada por um segmento de reta que em seguida é substituída por uma curva com nove segmentos de medida $\frac{1}{3}$ do segmento inicial. A construção se repete sucessivamente, de modo a afirmar que o comprimento da Curva de Peano é infinito, como pode ser observado a seguir.

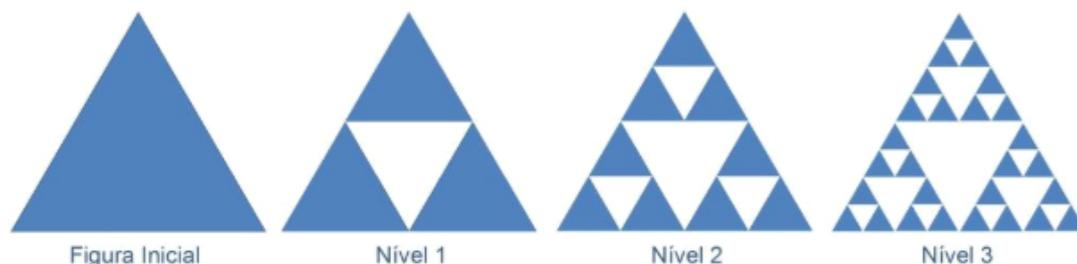


Fonte⁴: Rodrigues (2015, p. 12)

ii. **Triângulo de Sierpiński**: Apresentado pelo matemático polonês Waclaw Sierpiński, em 1916, a partir de um processo de construção iterativo que teve como ponto de partida a construção de

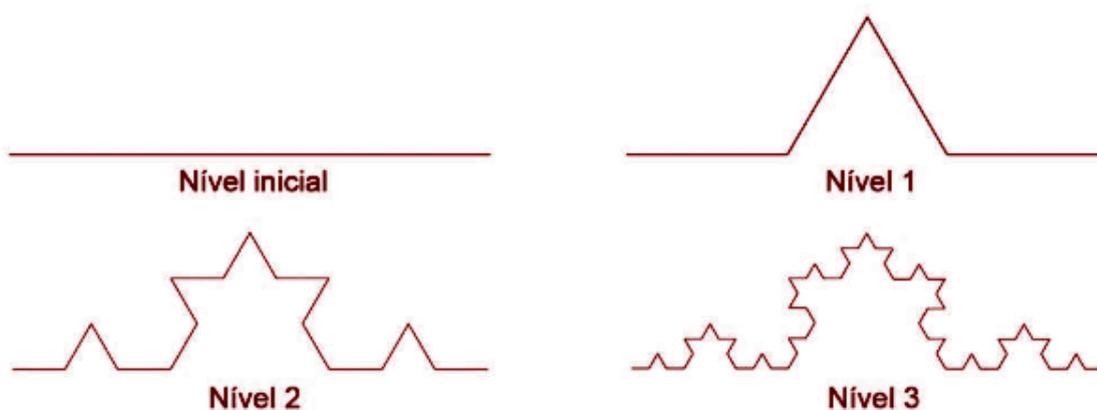
⁴ https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/mc1b_tatiana.pdf

um triângulo equilátero. É possível observar na figura a seguir que pontos médios são determinados em cada lado do 1º triângulo construído. Assim, ao se obter o triângulo do meio, deve-se retirá-lo e repetir o mesmo passo nos triângulos restantes. O mesmo procedimento é repetido sucessivamente nos triângulos obtidos ao retirar o do meio e, com isso, obtém-se o famoso **Fractal** Triângulo de Sierpiński representado abaixo:



Fonte: Rodrigues (2015, p. 5)

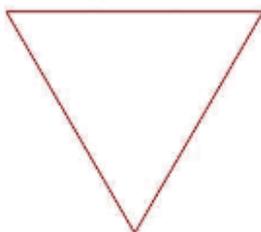
iii. **Curva de Koch ou Curva do Floco de Neve:** Apresentada pelo matemático polonês Helge von Koch, em 1904, sua construção é iniciada por um segmento de reta que é dividido em três partes. Em seguida, considera-se um terço médio para construir um triângulo equilátero sem base. Repete-se esse último passo para cada um dos segmentos restantes sucessivamente como observado na figura abaixo:



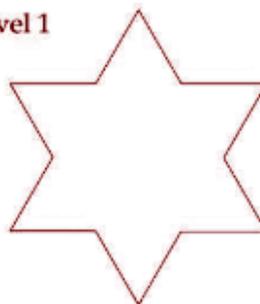
Fonte (cor alterada pela autora): Rodrigues (2015, p. 7)

Para Rodrigues (2015), a Curva de Koch ou Curva do Floco de Neve também pode ser construída tomando-se como início um triângulo equilátero de lado unitário como observado a seguir:

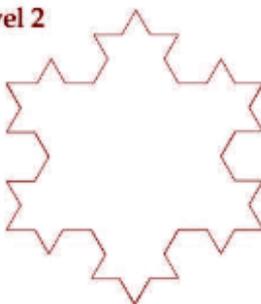
Nível inicial



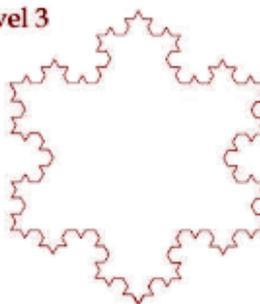
Nível 1



Nível 2



Nível 3



Fonte (cor alterada pela autora): Rodrigues (2015, p. 7)

É possível encontrar na literatura outras curvas estudadas por famosos matemáticos e que foram nomeadas, em determinado período da história por “monstros matemáticos”, mas que mais tarde, com a definição formal do que seriam *Fractais*, foram classificadas como tal. Podemos afirmar, ainda, que as três curvas utilizadas como exemplos neste material podem ser as mais famosas e, portanto, as escolhidas para um momento de introdução ao tema, já que são facilmente encontradas em diferentes pesquisas e propostas pedagógicas da área.



Momento de Atividades

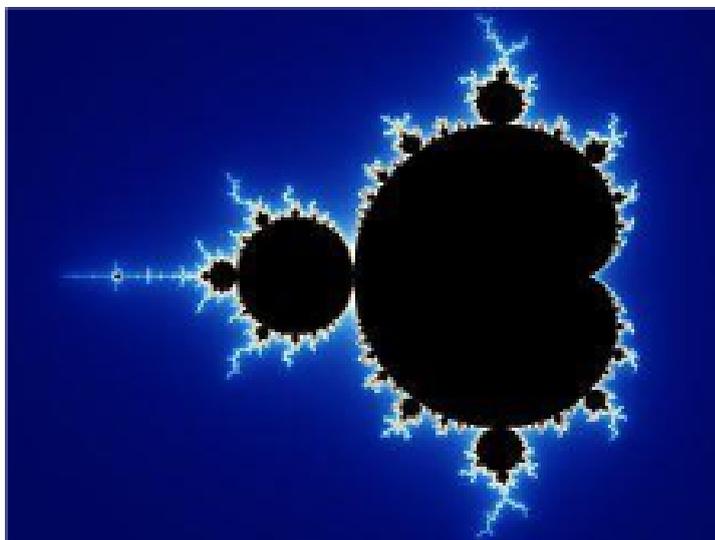
Apesar dos *Fractais* não apresentarem uma definição simples e precisa, é possível afirmar que eles:

- estão relacionados à teoria do Caos, considerando que na “natureza coexistem a ordem (o determinismo) e o Caos (a imprevisibilidade)” (Nascimento et al, 2012, p. 115);
- são definidos por três características básicas: “a autossimilaridade, a complexidade infinita (iteração) e a dimensão fracionária.” (Nascimento et al, 2012, p. 119).

Diante de tais afirmações e do histórico que envolvem os estudos do matemático francês Mandelbrot que, em 1950, utilizando um supercomputador da IBM, apresentou o Conjunto de Mandelbrot, o *fractal* mais famoso gerado por computador, é possível ter como possibilidade de atividade uma proposta de criação ou de construção de *Fractais* já existentes utilizando softwares matemáticos, apps ou malha quadriculada. Para isso, conhecendo a famosa criação de Mandelbrot que, segundo Dalia Ventura em seu artigo⁵ intitulado *O que são os fractais, padrões matemáticos infinitos apelidados de 'impressão digital de Deus'*, definiu como “uma paisagem

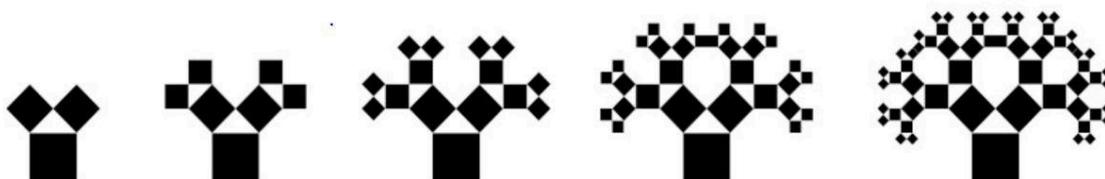
⁵ <https://www.bbc.com/portuguese/geral-50656301>

turbulenta, emplumada e aparentemente orgânica que lembra o mundo natural, mas é completamente virtual”, é possível ver, ainda segundo a autora, que “Cada forma dentro do conjunto contém um número de formas menores, que contém um número de outras formas ainda menores... e, assim por diante, sem fim”. Veja:



Mesmo que a referência para a construção de *Fractais* seja a do matemático Mandelbrot, via computador, é interessante saber que existem dois tipos de *Fractais*: os geométricos ou determinísticos e os não lineares que podem ser aleatórios ou da natureza. Veja alguns exemplos:

❖ **Fractais Geométricos:** criados por meio de processos matemáticos, podem ser construídos utilizando formas geométricas, como triângulos, quadrados e círculos repetindo-se padrões continuamente. Um exemplo já visto anteriormente neste documento foi o Triângulo de Sierpiński, mas outro exemplo muito famoso é a Árvore Pitagórica.



Disponível em: <https://escolakids.uol.com.br/matematica/fractais.htm>. Acesso em 05 jul. 2024.

❖ **Fractais não lineares:** podem ser aleatórios (I) ou da natureza (II). São eles:

I. **Fractais aleatórios:** são construídos com o auxílio da geometria dinâmica em que as interações podem ser repetidas infinitamente, tendo como resultado belíssimas imagens. De acordo com Nascimento et al (2012, p. 121) *apud* Tratch (2008, p. 19) “São construídos por meio de funções iterativas complexas, geralmente com o auxílio de programas computacionais específicos. São simétricos na escala, mas a transformação não é previsível”.



Disponível em⁶: <https://www.publicdomainpictures.net/pictures/260000/velka/random-fractal.jpg>. Acesso em 05 jul. 2024.

II. **Fractais da natureza**: possuem uma característica de autossimilaridade, ou seja, cada parte é semelhante ao todo, só que em menor escala. São exemplos desses tipos de fractais: nuvens, diferentes plantas, galhos de árvores, entre outros.



Disponível em: [O que são os fractais, padrões matemáticos infinitos apelidados de 'impressão digital de Deus' | Educação | G1](#). Acesso em 12 jul. 2024.

Diante das tantas informações já fornecidas neste item e nos anteriores sobre *Fractais*, que tal propor algumas atividades de **reconhecimento** e **produção** aos estudantes?

Uma primeira sugestão seria apresentar diferentes imagens para que eles:

- ★ Reconheçam suas classificações em **Geométricos** ou **não lineares**;
- ★ Em relação ao **Fractais não lineares**, se reconhecem os que são **aleatórios** e os que são da **natureza** (pode-se, inclusive fazer uma “pegadinha” apresentando uma imagem de montanhas, por exemplo, que seja produzida por computador, o que faz desse *fractal*, um *fractal* aleatório e não da natureza);
- ★ Em relação aos **Fractais Geométricos**, se reconhecem os padrões que os constituem.

Para um segundo momento, que tal propor a produção de *fractais*? Para isso, pode-se iniciar a atividade apresentando o seguinte vídeo:

⁶ Imagem obtida do site

<https://www.publicdomainpictures.net/pt/view-image.php?image=254465&picture=fractal-aleatorio>



Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=7FS4681u-MA&t=319s>. Acesso em 05 jul. 2024.

Vale ressaltar que o vídeo retoma vários conceitos e definições já apresentados neste documento de maneira resumida e dinâmica. Porém, traz alguns exemplos que talvez sejam difíceis de serem acompanhados pelos estudantes, como por exemplo, 'o Conjunto de Cantor' em que os meios dos segmentos são retirados sucessivamente. Talvez seja necessário fazer algumas pausas questionando se todos estão acompanhando e entendendo o que está sendo apresentado em cada trecho. Caso não estejam, utilizar o quadro para explicar de forma complementar o raciocínio apresentado, mas caso estejam acompanhando bem, vale a pena passar todo o vídeo e retomar apenas ao final o que se pretende com a proposta que é a construção de *fractais*.

Antes de propor uma produção deles, pode-se iniciar propondo a produção de um dos fractais já vistos anteriormente como o Triângulo de Sierpiński ou a Árvore Pitagórica, entre outros que sejam mais fáceis de reproduzir e que possa ser utilizada a malha quadriculada ou outra malha ou uma folha ofício mesmo, bem como um software matemático como o Geogebra, Geometrics ou Cabri⁷.

Importante que seja uma atividade única para que todos "aqueçam" suas coordenações motoras e compreendam a próxima etapa da atividade que poderá ser organizada em duplas ou trios para a escolha de um *fractal* de qualquer categoria para sua reprodução em grande escala, ou mesmo a criação de um *fractal* inédito (geométrico ou não linear) que deverá ser categorizado e também produzido em grande escala. Orientar que as produções sejam produzidas/reproduzidas em qualidade e tamanho adequado para uma exposição num grande painel com direito à assinatura da equipe e para que toda a comunidade escolar possa apreciar e, talvez, avaliar⁸.

Possibilidade(s) Avaliativa(s)

Mais uma vez tratando do processo avaliativo de uma atividade, é necessário voltar ao portfólio da Trilha Formativa e verificar que os eixos estruturantes que definem essa Unidade Curricular são: *Investigação Científica; Processos Criativos; Mediação e intervenção sociocultural*. Entendendo que as atividades propostas neste capítulo perpassam habilidades que contemplam os três eixos,

⁷ Ver como exemplo a atividade proposta pela Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues (UNESP/Bauru) em https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/mc1b_tatiana.pdf (pp. 34-39)

⁸ Pode-se variar as produções/reproduções de painéis com outras produções como criação de **caleidoscópios** ou **cartões fractais** como pode ser visto em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/MonografiaFractais.pdf (pp 33-34) e <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7651/2/arquivototal.pdf> (pp 73-75), respectivamente.

é possível considerar a participação de todos no processo avaliativo (professor/a, estudantes e comunidade escolar que participar da exposição, por exemplo), desde que sejam estipulados critérios bem definidos para cada momento.

Dessa forma, destaca-se a importância do/a professor/a estipular, de acordo com suas necessidades e sua dinâmica de trabalho, critérios que possam contribuir para os processos de ensino e aprendizagem já citados anteriormente.



Por dentro dos conceitos

O ensino da Geometria para além da Geometria Euclidiana

É certo afirmar que a componente de Matemática apresenta uma característica de generalidade e abstração que a diferencia das demais componentes escolares. Mas além disso, é necessário destacar que a Geometria foi o primeiro ramo dessa área que se organizou logicamente e que tem como objetivos principais a justificativa, a discussão lógica e a dedução, além das demonstrações. Importantes habilidades matemáticas e, especificamente geométricas, que exige questionar como o ensino de Geometria tem se apresentado na educação básica, ao longo dos anos. São problemas que incluem tanto o processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos geométricos quanto sua abordagem nos momentos em que tais conteúdos são pouco explorados ou simplesmente privilegiam o tecnicismo em prol da teoria.

Acompanhando algumas pesquisas sobre o ensino de Geometria no Brasil é possível afirmar que '*Geometrizo é preciso*'. Isso porque, historicamente, o ensino de Geometria esteve em crise por diversos motivos. Dentre eles é possível citar o Movimento da Matemática Moderna (MMM) que propiciou demasiada ênfase no ensino da Álgebra devido à sua proposta e deixou o conhecimento geométrico em segundo plano por um longo período e, com isso, contribuiu para que os Livros Didáticos (LD) de matemática da época, e até mesmo depois, abordassem os conteúdos geométricos nos capítulos finais de suas obras.

Uma abordagem que permitiu que muitos professores não trabalhassem tais conteúdos, visto que por muitas vezes o tempo não era suficiente para finalizar o Livro Didático adotado nas aulas de matemática em cada ano letivo, além destes professores não possuírem o hábito de selecionar os capítulos a serem trabalhados de acordo com suas necessidades e interesses, mas sim, normalmente seguir a sequência apresentada pelo autor. Muitas discussões foram realizadas desde então e hoje entende-se que o Livro Didático é uma importante ferramenta para muitas realidades em que ele é praticamente o único recurso do professor e, principalmente, do estudante de escola pública. Tais discussões apresentam o Livro Didático como um recurso importante para o planejamento escolar podendo ser moldado de acordo com as necessidades e interesses didáticos de cada professor, além de servir como um suporte às suas práticas pedagógicas⁹.

Apesar de alguns estudiosos atualmente negarem a influência do Movimento da Matemática Moderna para o abandono do conhecimento geométrico no planejamento escolar durante um longo período, principalmente, no Brasil, vários estudos têm apresentado propostas de resgate à esse importante conhecimento que proporciona o desenvolvimento de diferentes habilidades que vão desde à identificação e nomeação de figuras planas até a utilização de definições ou

⁹ Veja como leitura complementar: <https://www.edocente.com.br/importancia-do-livro-didatico-na-pratica-pedagogica/>

teoremas. São estudos que apresentam levantamentos bibliográficos, sequências didáticas, utilização de softwares, formação docente, entre outros, mas que trazem como ponto comum a importância da Geometria Euclidiana e Não-Euclidianas na educação básica.

De acordo com o site *Estudante de Filosofia*¹⁰, dentre os princípios básicos da geometria clássica, mais conhecida por geometria Euclidiana, o quinto postulado ou postulado das paralelas mereceu especulações de geômetras de todos os tempos e em diferentes partes do mundo. Tais especulações abriram caminho para que famosos matemáticos como Lobachevsky, Bolyai, Gauss e Riemann aprofundassem seus estudos e descobrissem geometrias em que o postulado das paralelas não era válido, trazendo resultados bem importantes para a Matemática e para a Física até então (DELAI e FRANCO, 2008).



Momento de Atividades

Comece a atividade propondo o vídeo¹¹ a seguir:



A VISÃO DE EUCLIDES E OUTRAS GEOMETRIAS | GEOMETRIA
EUCLIDIANA E NÃO EUCLIDIANA



A Matemania...
109 mil inscritos

Inscrito

294



Compartilhar



A partir do que traz o vídeo:

- Peça que os estudantes pesquisem sobre quem foi Euclides e quais são os seus postulados;
- Peça que eles se organizem em grupos e dê à eles a missão de escolher e explicar pelo menos um dos postulados com direito a exemplos;
- Para a devolutiva da explicação, você pode organizar apenas uma roda de conversa para que os estudantes não precisem, necessariamente, realizar uma apresentação formal. Pode ser uma explicação apenas do que entendeu, se entendeu algum dos postulados com mais facilidade do que outros, se fez sentido, qual não fez sentido... Uma boa estratégia para que todos acompanhem a fala dos colegas, é anotar tudo que você considerar significativo dessas falas no quadro branco. Com isso, ao final de todas as falas, é possível retomar a explicação dos postulados a partir do que eles apresentaram de entendimento ou não, formalizando todo o conteúdo. O ponto será focar no quinto postulado de Euclides. Ou seja:

“dado uma reta qualquer e um ponto fora desta reta, existe uma única reta paralela à reta dada, passando por esse ponto”.

¹⁰ Site: <https://www.estudantedefilosofia.com.br/conceitos/geometriasnaoeuclidianas.php>

¹¹ Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=sYPuiUDLFJE>

- Antes de seguir para as **Geometrias Não-Euclidianas**, proponha algumas atividades envolvendo a geometria clássica ou de Euclides que retome os seus postulados para que os estudantes possam acompanhar o que muda na proposta das demais geometrias, como por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo não resultar em 180 graus.
- Depois dessa retomada, organize mais uma vez os estudantes em grupos para que eles possam escolher uma das geometrias apresentadas no vídeo, por exemplo, ou outras que podem ser indicadas por você mesmo¹² para que façam suas pesquisas e, agora sim, façam uma apresentação formal do que entenderam. Destaque que nas escolhas feitas, a geometria *Fractal* pode ser retomada por algum grupo, mas que nesse caso, novos elementos devem ser abordados de forma que a evidencie como uma geometria Não-Euclidiana.
- Para o processo produtivo, lembre-se da importância do papel do professor mediador. Ou seja, lembre-se que os estudantes devem fazer suas pesquisas acompanhados e orientados durante todo o tempo estipulado para a realização da mesma. Por se tratar de um assunto diferente do que foi visto até então na educação básica, é importante que o processo de acompanhamento e orientação no que diz respeito às devidas correções e alterações, sugestões, entre outros, seja constante para não haver desestímulo e/ou abandono do trabalho. Também é importante que os estudantes se organizem de acordo com suas habilidades para que todos se sintam incluídos. Definir quem será responsável pelo quê, incluindo, por exemplo, o organizador do tempo e responsável pela obtenção e separação dos materiais que serão necessários, o estudante que será responsável pelos registros fotográficos de cada momento de produção e apresentação, da produção escrita, entre outros;
- Para as apresentações, estipule, juntamente com os estudantes, os critérios avaliativos que serão abordados. Ou seja, o que deve ser pontuado como positivo nas apresentações? Existirá uma nota que pontue a equipe como um todo e outra que pontue cada integrante individualmente e sua participação nas produções? Existirá uma nota para a apresentação realizada e uma outra nota para o trabalho escrito? Existirá um trabalho escrito a ser entregue? Quais pontos serão considerados em cada um desses produtos? A avaliação das apresentações será realizada apenas pelo professor ou todos os grupos ficarão responsáveis por avaliar seus colegas respeitando os critérios estipulados?...

Para essa última proposta de atividade e de acordo com o Portfólio da Unidade Curricular de *Fractais*, é importante citar que dois dos *Focos Pedagógicos* apresentados no documento se destacam nesse momento:

- **Identificação e aprofundamento de um tema ou problema [...]; e,**
- **Ampliação de conhecimentos sobre o problema a ser enfrentado [...].**

Apesar da presença dos demais *Focos Pedagógicos* no decorrer na proposta, é possível identificar uma certa ênfase nos dois focos destacados acima. Uma observação que retoma a reflexão de que nem sempre uma atividade irá ou deverá abordar TODOS os *Focos Pedagógicos*. Tal abordagem poderá ser sempre parcial de acordo com os objetivos a serem atingidos.

¹² Dicas de leitura: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/236-4.pdf>
https://www.ime.usp.br/~cortiz/homepage/Geometrias_Euclidiana_e_Nao-Euclidiana.html
Dica de vídeo complementar: <https://www.youtube.com/watch?v=eqjKgzx7fLk>

Possibilidade(s) Avaliativa(s)

Retomado mais uma vez que a avaliação de uma atividade deve ter relação com as *habilidades a serem alcançadas*, e essas, por sua vez, têm relação com o que foi proposto nos *Focos Pedagógicos*, é importante, verificar sempre se essa relação está se fazendo presente. Nesse caso, observar se os estudantes:

Conseguem investigar e analisar uma dúvida, questão ou problema selecionando informações retiradas de fontes confiáveis; reconhecem produtos e/ou processos criativos na produção dos conhecimentos relacionados ao tema; identificam e explicam questões socioculturais e ambientais a partir da aplicação dos conhecimentos e habilidades do tema, avaliando e tomando decisões necessárias. (PERNAMBUCO, 2021, p.41)

Por fim, assim como na avaliação dos itens anteriores, o/a professor/a deve estipular, de acordo com sua realidade, outros critérios avaliativos que poderão contribuir com os processos de ensino e aprendizagem.

Referências bibliográficas

ALMOULOUD, Saddo Ag. Registros de Representação Semiótica e compreensão de conceitos geométricos *In*: MACHADO, SILVIA DIAS ALCÂNTARA (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003. (pp. 125-147).

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

CÂMARA, Marcelo dos Santos. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. *In*: BORBA, Rute e Guimarães, Gilda (orgs.). **A pesquisa em Educação Matemática: repercussões na sala de aula**. São Paulo: Cortez, 2009. (pp. 177-211).

NASCIMENTO, Maristel do. SILVA, Sani de Carvalho Rutz da. MACIEL, Nilcéia Aparecida. Uma proposta didática para o ensino de Geometria Fractal em sala de aula na Educação Básica. *In*: VIDYA, v. 32, n. 2, p.113-132, jul./dez., 2012 - Santa Maria, 2012. ISSN 0104-270 X. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/277/253>. Acesso em 29 abr. 2024.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes. Currículo de Pernambuco: Ensino Médio. Recife: A Secretaria, 2021.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes. Itinerários Formativos: Portfólios da Trilhas, Matemática, Design e Criatividade. Disponível em: https://portal.educacao.pe.gov.br/wp-content/uploads/2023/08/Portfolio_Trilha_Matematizacao_Design.pdf . Acesso em 30 maio 2024.

RODRIGUES, Tatiana Miguel. Criando Fractais através de softwares e materiais concretos. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/mc1b_tatiana.pdf. Acesso em 10 maio 2024.